UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 B

Nombre: ______________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que: $\lim_{x\to 1} f(x) = -8$ y $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$. Indicando las propiedades utilizadas, hallar el valor de b para que: $\lim_{x\to 1} \frac{bf(x)}{f(x)+g(x)} = 3$	b) Definir formalmente $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3}{x+2} = -2$
c) Dibujar una función g con dominio $[-2,2]$, $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=1$, discontinua en -1 y en 1, continua a la derecha en -1 y por la izquierda en 1.	
d) Hallar $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{2-3x^2}$	e) Sabiendo que $3x-3 < g(x) < x^2-x+1$, para $x \neq 2$. Hallar $\lim_{x\to 2} g(x)$

(1 Pto c/u)

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{sen(x)}$ (3 Ptos)	b) $\lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{b-\sqrt{x^2+b^2}}$, con $a>0$, $b>0$ (4 Ptos)
c) $\lim_{x\to 1} \frac{sen(2x-6)}{x-3}$ (3 Ptos)	d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{(2+x)(1-x)}{(2-3x)(1+2x)}$ (4 Ptos)

3. Dada la función g definida por: $g(x) = \begin{cases} x^2+2 & si \quad x \le 1 \\ bx+a & si \quad 1 < x \le 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-2} & si \quad x > 3 \end{cases}$ (6 Ptos)

Hallar los valores de a y b para que g sea continua en todo $\mathbb{R}$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio. (2 Ptos)

b) Probar que existe un $t \in (2,3)$, tal que: $f(t) = 5$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+\cos(x)}{x-3} & si \quad x < 1 \\ x^3-2x^2+2 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$ (3 Ptos)

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 B

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -8 \quad y \quad \lim_{x\to 1} g(x) = 5$$

Indicando las propiedades utilizadas, hallar el valor de b para que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{bf(x)}{f(x)+g(x)} = 3$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{bf(x)}{f(x)+g(x)} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\left(\lim_{x\to 5} f(x)\right)}{\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right) + \lim_{x\to 5} g(x)} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8b}{-8+5} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{9}{8}$$

b) Definir formalmente

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3}{x+2} = -2$$

Solución:

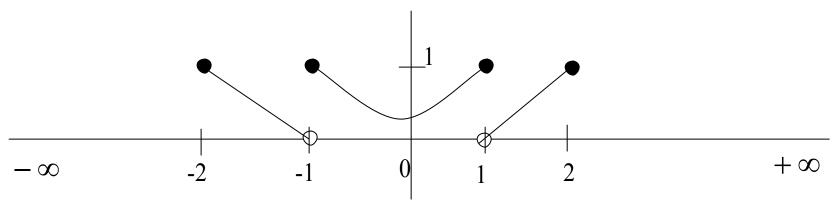
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, talque:$

$$0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2-3}{x+2} + 2 \right| < \varepsilon$$

(1 Pto c/u)

c) Dibujar una función g con dominio $[-2,2]$, $g(-2) = g(-1) = g(1) = g(2) = 1$, discontinua en -1 y en 1, continua a la derecha en -1 y por la izquierda en 1.

Solución:



Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 B

Nombre: ________________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

d) Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{2-3x^2}$

Solución:

$$\frac{x^2+1}{2-3x^2}=\frac{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{\left(\frac{2-3x^2}{x^2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}-3}$$

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2-3x^2}==\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}-3}=-\frac{1}{3}$$

e) Sabiendo que $3x-3<g(x)<x^2-x+1$, para $x\neq 2$.
Hallar $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Solución:

Como $\lim\limits_{x\to 2}(3x-3)=3=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x+1\right)$, entonces por el teorema del emparedado

$$\lim_{x\to 2} g(x)=3$$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{sen(x)}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\frac{1-\cos(x)}{sen(x)}$$

$$=\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{sen(x)(1+\cos(x))}$$

$$=\frac{1-\cos^2(x)}{sen(x)(1+\cos(x))}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{b-\sqrt{x^2+b^2}}$, con $a>0$, $b>0$ (4 Ptos)

Solución:

$$\frac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{b-\sqrt{x^2+b^2}}$$

$$=\frac{\left(a-\sqrt{x^2+a^2}\right)\left(a+\sqrt{x^2+a^2}\right)\left(b+\sqrt{x^2+b^2}\right)}{\left(b-\sqrt{x^2+b^2}\right)\left(a+\sqrt{x^2+a^2}\right)\left(b+\sqrt{x^2+b^2}\right)}$$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 B

Nombre: ______________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

$= \dfrac{sen^2(x)}{sen(x)(1+\cos(x))}$ $= \dfrac{sen(x)}{(1+\cos(x))}$ Luego: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{sen(x)}$ $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{sen(x)}{(1+\cos(x))}\right) = \dfrac{0}{2} = 0$	$= \dfrac{(a^2-x^2-a^2)}{(b^2-x^2-b^2)}\dfrac{\left(b+\sqrt{x^2+b^2}\right)}{\left(a+\sqrt{x^2+a^2}\right)}$ $= \dfrac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{b-\sqrt{x^2+b^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a} = \dfrac{b}{a}$
c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{sen(2x-6)}{x-3}$ (3 Ptos) **Solución:** $\dfrac{sen(2x-6)}{x-3} = 2\dfrac{sen(2x-6)}{2x-6}$ Luego: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{sen(2x-6)}{x-3}$ $= 2\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{sen(2x-6)}{2x-6}$ $= 2\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{sen(y)}{y} = 2\ .\ 1 = 2$	d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2+x)(1-x)}{(2-3x)(1+2x)}$ (4 Ptos) **Solución:** $\dfrac{(2+x)(1-x)}{(2-3x)(1+2x)} = \dfrac{\dfrac{(2+x)}{x}\dfrac{(1-x)}{x}}{\dfrac{(2-3x)}{x}\dfrac{(1+2x)}{x}}$ $= \dfrac{\left(\dfrac{2}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}{\left(\dfrac{2}{x}-3\right)\left(\dfrac{1}{x}+2\right)}$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2+x)(1-x)}{(2-3x)(1+2x)} =$ $= \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}{\left(\dfrac{2}{x}-3\right)\left(\dfrac{1}{x}+2\right)} = \dfrac{1\ .\ (-1)}{(-3)\ .\ 2} = \dfrac{1}{6}$

3. Dada la función g definida por: $g(x) = \begin{cases} x^2+2 & si \quad x \le 1 \\ bx+a & si \quad 1 < x \le 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-2} & si \quad x > 3 \end{cases}$

Hallar los valores de a y b para que g sea continua en todo $\mathbb{R}$ (6 Ptos)

Solución:

3.1.- g es continua en $(-\infty,1)$, ya que es un polinomio.
g es continua en $(1,3)$, ya que es un polinomio.
g es continua en $(3,+\infty)$, ya que es el cociente de funciones continuas y la función del denominador no se anula en $(3,+\infty)$.

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

3.2.- Continuidad en $x=1$, $\left(\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)\right)$

3.2.1.- $g(1)=1^2+2=3$

3.2.2.- $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2\right)=3$

y $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(bx+ba\right)=b+a$,

Luego el limite existe si se satisface: $3=b+a$

Por lo tanto g es continua en $x=1$, si se satisface: $b+a=3=g(1)$

3.3.- Continuidad en $x=3$, $\left(\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)\right)$

3.3.1.- $g(3)=3a+b$

3.3.2.- $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(bx+a\right)=3b+a$

y $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-2}\right)=-1$

Luego el limite existe si se satisface: $g(3)=3b+a=-1$

Por lo tanto g es continua en $x=1$ y $x=3$, si se satisface:

$$\begin{cases} b+a=3 \\ 3b+a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+a=3 \\ 2b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$$

g es continua en todo $\mathbb{R}$, si se toman los valores $a=5$ y $b=-2$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio.

Solución:

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea un w un valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $t\in(a,b)$, talque: $f(t)=w$

(2 Ptos)

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 B

Nombre: ______________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

b) Probar que existe un $t \in (2,3)$, tal que: $f(t) = 5$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\cos(x)}{x-3} & si \quad x < 1 \\ x^3 - 2x^2 + 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ (3 Ptos)

Solución:
$f(2) = 2$ y $f(3) = 11$, como $f(2) < 5 < f(3)$ y la función es continua en $[2,3]$, ya que es un polinomio en ese intervalo, se puede aplicar el teorema del valor intermedios y en consecuencia, existe un $t \in (2,3)$, talque: $f(t) = 5$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado